PROCEEDINGS OF IAM, V.11, N.2, 2022, pp.137-158

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПЛУНЖЕРА ШТАНГО-НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ

Н.С. Гаджиева

Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: nazile.m@mail.ru

Резюме. В статье рассматривается задача нахождения оптимальной програмной траектории и управления колебательными системами с жидкими демпферами с периодическими граничными условиями в штанго-насосной установке. Во-первых, уравнение движения колебательной системы приводится к матричной форме. Затем строятся квадратичный функционал и расширенный функционал, записываются уравнения Эйлера-Лагранжа для нахождения оптимальной программной траектории и управления. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод.
Ключевые слова: Колебательные системы, производная дробного порядка, расширенный функционал, уравнение Эйлера-Лагранжа, матрица Гамильтона.
AMS Subject Classification: 33E12, 34A08.

1. Введение.

Колебательные системы с жидкими демпферами [1-5, 13] отличаются от обычных [16-19, 23, 24] тем, что второй член сохраняет при себе производные с дробными порядками. Существуют различные исследования по изучению последних, такие, как построение решения линейных систем с дробными порядками через фундаментальные матрицы [3, 12], определение порядка дробных производных через соответствующие статистические данные [7, 8], построение соответствующих оптимальных регуляторов через параметризации Ларина [3, 12, 14], нахождение функции Миттаг-Леффлера через экспоненциальные функции [13, 20, 27] и т.д. Однако, в последнее время много внимания уделяется добыче нефти со штанго-насосной установкой [6], где движение плунжера описывается классическими уравнениями осциллятора [16, 17]. По нашему мнению, такие постановки являются грубоватыми и, поскольку плунжер находится внутри Нютоновской жидкости, то движение будет описываться уравнениями с дробно-рациональным порядком во втором члене. Поэтому, задача нахождения оптимальных траекторий и управлений для колебательных систем с жидкими демпферами, чему посвящена настоящая работа, является более интересной. Из свойства движения плунжера краевые условия берутся периодическими и переход движения с одного режима ко второму описывается импульсными системами. Метод решения сводится к построению расширенных функционалов и методу Лагранжа. Результаты иллюстрируются конкретным простым цифровым примером.

2. Постановка задачи.

Пусть движение колебательных систем с жидкими демпферами при добыче нефти штанго-насосной установкой описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными и граничными условиями [17, 19, 22-24, 26] следующим образом

$$m\ddot{y}(x) + aD^{\alpha} y(x) + by(x) = u(x),\ 0 < x_0 < x < l + x_0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(l + x_0 + 0) = y(l + x_0 - 0), \\ \dot{y}(l + x_0 + 0) = -\dot{y}(l + x_0 - 0) + V_1, \end{cases} \tag{2}$$

$$m_1\ddot{y}(x) + aD^{\alpha} y(x) + by(x) = u(x),\ l + x_0 < x < 2l + x_0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} y(2l + x_0) = y(2l + x_0 - 0), \\ \dot{y}(2l + x_0) = -\dot{y}(2l + x_0 - 0) + V_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $y(x)$ искомая непрерывная функция, a, b, m, m_1, V_1, V_2 заданные параметры, $u(x)$ непрерывная скалярная функция, $\alpha = \dfrac{p}{q} \in (1,2)$, p, q натуральные числа.

Пусть мы имеем следующие граничные условия

$$\begin{cases} y(2l + x_0) = y(x_0), \\ \dot{y}(2l + x_0) = \dot{y}(x_0), \end{cases} \tag{5}$$

Требуется найти минимум следующего квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{2l+x_0} (Y'(x)QY(x) + u^2(x)R)dx \to \min, \tag{6}$$

где

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) & D^{\frac{1}{q}} y(x) & D^{\frac{2}{q}} y(x) & \ldots & \dot{y}(x) & \ldots & D^{\frac{2q-1}{q}} y(x) \end{bmatrix}',\quad Q = Q' \ge 0$$

симметричная матрица, $R \ge 0$ скаляр, штрих означает операцию транспонирования.

3. Сведение задачи (1)—(6) к системе нормальной формы.

Примем следующие обозначения [4, 5, 31]:

$$D^{\frac{i}{q}} y(x) \equiv z_i(x),\ i = \overline{0,2q-1},\ 0 < x_0 < x < l + x_0,$$
$$y(x) = z_0(x),$$
$$\begin{cases} D^{\frac{1}{q}} y(x) = z_1(x), \quad D^{\frac{1}{q}} z_0(x) = z_1(x) \\ D^{\frac{2}{q}} y(x) = z_2(x), \quad D^{\frac{1}{q}} z_1(x) = z_2(x) \\ D^{\frac{3}{q}} y(x) = z_3(x), \quad D^{\frac{1}{q}} z_2(x) = z_3(x) \\ \ldots \\ D^{\frac{2q-1}{q}} y(x) = z_{2q-1}(x), \quad D^{\frac{1}{q}} z_{2q-2}(x) = z_{2q-1}(x) \\ \ddot{y}(x) = D^{\frac{1}{q}} z_{2q-1}(x), \quad D^{\frac{1}{q}} z_{2q-1}(x) = -\frac{a}{m} z_p(x) - \frac{b}{m} z_0(x) + u(x). \end{cases}$$

Это обозначение записывается для интервала $l + x_0 < x < 2l + x_0$ аналогично, и мы получаем

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{q}} z_0(x) = z_1(x) \\ D^{\frac{1}{q}} z_1(x) = z_2(x) \\ D^{\frac{1}{q}} z_2(x) = z_3(x) \\ \ldots \\ D^{\frac{1}{q}} z_{2q-2}(x) = z_{2q-1}(x) \\ D^{\frac{1}{q}} z_{2q-1}(x) = -\frac{a}{m_1} z_p(x) - \frac{b}{m_1} z_0(x) + u(x). \end{cases}$$

С учетом введенных обозначений задача (1)-(6) сводится к следующему дифференциальному уравнению с дробным порядком с периодическими граничными условиями

$$D^{\frac{1}{q}} Z(x) = AZ(x) + Bu(x),\ 0 < x_0 < x < l + x_0, \tag{7}$$

$$Z(l + x_0 + 0) = F_\delta Z(l + x_0 - 0) + W_1, \tag{8}$$

$$D^{\frac{1}{q}} Z(x) = A_1 Z(x) + B_1 u(x),\ l + x_0 < x < 2l + x_0, \tag{9}$$

$$Z(2l + x_0) = F_\delta Z(2l + x_0 - 0) + W_2. \tag{10}$$

Граничное периодическое условие будет иметь следующий вид

$$Z(2l + x_0) = Z(x_0), \tag{11}$$

Функционал (6) приводится к виду

$$J = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{2l + x_0} (Z'(x) Q Z(x) + u^2(x) R) dx \to \min, \tag{12}$$

где

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) & z_1(x) & z_2(x) & \dots & z_q(x) \dots & z_p(x) & \dots & z_{2q-1}(x) \end{pmatrix}',$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{b}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & -\frac{a}{m} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{b}{m_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots. & -\frac{a}{m_1} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad V_1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0)',$$

$$W_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad V_2 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0)', \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}',$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m_1} \end{pmatrix}'.$$

Для решения задачи (7)-(12) построим расширенный функционал [9, 19, 29] следующим образом

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{l+x_0} \left\{ Z'(x)QZ(x) + u^2(x)R + \lambda'(x)[AZ(x) + Bu(x) - D^{\frac{1}{q}} Z(x)] \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{l+x_0}^{2l+x_0} \left\{ Z'(x)QZ(x) + u^2(x)R + \lambda'(x)[A_1 Z(x) + B_1 u(x) - D^{\frac{1}{q}} Z(x)] \right\} dx +$$

$$+ \lambda'(l + x_0 + 0)[Z(l + x_0 + 0) - F_\delta Z(l + x_0 - 0) - W_1] +$$

$$+ \lambda'(2l + x_0)[Z(2l + x_0) - F_\delta Z(2l + x_0 - 0) - W_2] +$$

$$+ \lambda(x_0)[Z(2l + x_0) - Z(x_0)], \tag{13}$$

где

$\lambda(x) = \begin{bmatrix} \lambda_0(x) & \lambda_1(x) & \lambda_2(x) & \dots & \lambda_{2q-1}(x) \end{bmatrix}'$ множитель Лагранжа.

Введем выражение $D^{\frac{1}{q}} Z(x)$ из [30]

$$D^{\frac{1}{q}} Z(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{q}}}{(-\frac{1}{q})!} Z(\tau) d\tau.$$

Если проинтегрировать по частям последние члены расширенного функционала с учетом выражения $D^{\frac{1}{q}} Z(x)$, то, проведя некоторые преобразования [28, 30], получим

$$\int_{x_0}^{l+x_0} \lambda'(x) D_{x_0+}^{\frac{1}{q}} Z(x) dx = \int_{x_0}^{l+x_0} \left[D_{(l+x_0)-}^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) \right] Z(\tau) d\tau,$$

$$\int_{l+x_0}^{2l+x_0} \lambda'(x) D_{(l+x_0)+}^{\frac{1}{q}} Z(x) dx = \int_{l+x_0}^{2l+x_0} \left[D_{(2l+x_0)-}^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) \right] Z(\tau) d\tau, \tag{14}$$

где

$$D_{(l+x_0)-}^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{l+x_0} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{q}}}{(-\frac{1}{q})!} \lambda'(x) dx, \ \ \tau \in \left(x_0,\, l+x_0\right),$$

$$D_{(2l+x_0)-}^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{2l+x_0} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{q}}}{(-\frac{1}{q})!} \lambda'(x) dx, \ \ \tau \in \left(l+x_0,\, 2l+x_0\right).$$

Подставляя (14) в (13) и меняя порядок интеграла $\bar{J}$, получаем [16]

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{l+x_0} \left\{ Z'(\tau) Q Z(\tau) + u^2(\tau) R + \lambda'(\tau)[A Z(\tau) + B u(\tau)] - \left[D^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) \right] Z(\tau) \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{l+x_0}^{2l+x_0} \left\{ Z'(\tau) Q Z(\tau) + u^2(\tau) R + \lambda'(\tau)[A_1 Z(\tau) + B_1 u(\tau)] - \left[D^{\frac{1}{q}} \lambda'(\tau) \right] Z(\tau) \right\} d\tau +$$

$$+ \lambda'(l+x_0+0)[Z(l+x_0+0) - F_\delta Z(l+x_0-0) - W_1] +$$
$$+ \lambda'(2l+x_0)[Z(2l+x_0) - F_\delta Z(2l+x_0-0) - W_2] +$$

$$+\lambda(x_0)(Z(2l+x_0)-Z(x_0)). \qquad (15)$$

Рассмотрим вариацию функционала $\bar{J}$ [19], такую, что

$$\delta\bar{J}=\int_{x_0}^{l+x_0}\left\{[Z'(\tau)Q+\frac{1}{2}\lambda'(\tau)A-\frac{1}{2}D^{\frac{1}{q}}\lambda'(\tau)]\delta Z+[u(\tau)R+\frac{1}{2}\lambda'(\tau)B]\delta u\right\}d\tau+$$

$$+\int_{l+x_0}^{2l+x_0}\left\{[Z'(\tau)Q+\frac{1}{2}\lambda'(\tau)A_1-\frac{1}{2}D^{\frac{1}{q}}\lambda'(\tau)]\delta Z+[u(\tau)R+\frac{1}{2}\lambda'(\tau)B_1]\delta u\right\}d\tau+$$

$$+\lambda_q(l+x_0+0)\delta Z(l+x_0+0)-\lambda(l+x_0+0))F_\delta\delta Z(l+x_0-0)+$$

$$+\lambda(2l+x_0)\delta Z(2l+x_0)-\lambda_q(2l+x_0)F_\delta\delta Z(2l+x_0-0)+$$

$$+\lambda_q(x_0)\delta Z(2l+x_0)-\lambda(x_0)\delta Z(x_0). \qquad (16)$$

Тогда, аналогично [19, 22, 16], из (16) получаем

$$Z'(x)Q+\lambda'(x)A-D^{\frac{1}{q}}\lambda'(x)=0,\quad 0<x_0<x<l+x_0, \qquad (17)$$

$$u(x)R+\lambda'(x)B=0, \qquad (18)$$

$$Z'(x)Q+\lambda'(x)A_1-D^{\frac{1}{q}}\lambda'(x)=0,\quad l+x_0<x<2l+x_0, \qquad (19)$$

$$u(x)R+\lambda'(x)B_1=0, \qquad (20)$$

с периодическими граничными условиями

$$Z(l+x_0+0)=F_\delta Z(l+x_0-0)+W_1,$$

$$Z(2l+x_0)=F_\delta Z(2l+x_0-0)+W_2,$$

$$Z(2l+x_0)=Z(x_0),$$

$$\lambda(l+x_0+0)=0,$$

$$\lambda(2l+x_0)=-\lambda(x_0).$$

Если рассматривать уравнения (18), (20) в уравнениях (7), (9), то уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи (7)-(12) будет иметь вид [15, 19]

$$D^{\frac{1}{q}}\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix},\quad 0<x_0<x<l+x_0, \qquad (21)$$

$$D^{\frac{1}{q}}\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix}=H_1\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix},\quad l+x_0<x<2l+x_0, \qquad (22)$$

с условиями

$$\begin{bmatrix} Z(l+x_0+0) \\ \lambda(l+x_0+0) \end{bmatrix} = F_{1\delta} \begin{bmatrix} Z(l+x_0-0) \\ \lambda(l+x_0-0) \end{bmatrix} + W_{11}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} Z(2l+x_0) \\ \lambda(2l+x_0) \end{bmatrix} = F_{1\delta} \begin{bmatrix} Z(2l+x_0-0) \\ \lambda(2l+x_0-0) \end{bmatrix} + W_{22}, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} Z(2l+x_0) \\ \lambda(2l+x_0) \end{bmatrix} = F_{2\delta} \begin{bmatrix} Z(x_0) \\ \lambda(x_0) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

где матрицы систем уравнений (21), (22)

$$H = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B' \\ Q & A' \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1R^{-1}B_1' \\ Q & A_1' \end{bmatrix} \tag{26}$$

Гамильтоновы [3] и имеют собственные значения $\mu_i,\ i=\overline{1,2q},\ \tilde{\mu}_i,\ i=\overline{1,2q},$ которые «зеркально» симметричны относительно начала координат на комплексной плоскости [1], т.е. если μ_i и $\tilde{\mu}_i$ собственные значения матриц (26), тогда $-\mu_i$ и $-\tilde{\mu}_i$ тоже собственные значения матриц (26). Таким образом, (21), (22) являются гамильтоновыми системами относительно μ_i и $\tilde{\mu}_i$,

$$F_{1\delta} = \begin{bmatrix} F_\delta & 0_{2q\times 2q} \\ 0_{2q\times 2q} & 0_{2q\times 2q} \end{bmatrix}, \quad F_{2\delta} = \begin{bmatrix} I_{2q\times 2q} & 0_{2q\times 2q} \\ 0_{2q\times 2q} & -I_{2q\times 2q} \end{bmatrix},$$

$$W_{11} = \lfloor W_1 \quad 0_{2q\times 1} \rfloor, \quad W_{22} = \lfloor W_2 \quad 0_{2q\times 1} \rfloor.$$

4. Решение задачи (21)-(25) для дробной производной.

Пусть [1- 3, 10]

$$\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \tilde{Z}(x) \\ \tilde{\lambda}(x) \end{bmatrix}, \quad 0 < x_0 < x < l + x_0, \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \tilde{Z}(x) \\ \tilde{\lambda}(x) \end{bmatrix}, \quad l + x_0 < x < 2l + x_0, \tag{28}$$

полагая, что

$$T^{-1}HT = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}^{-1}H_1\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{A}_- \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где $T, \tilde{T}$ таковы, что $A_+, \tilde{A}_+$ имеет собственные значения в левой полуплоскости, а $A_-, \tilde{A}_-$ - в правой.

Системы (21), (22) с помощью преобразований (27)-(29) переходят к виду

$$D^{\frac{1}{q}}\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix},\ \ 0<x_0<x<l+x_0, \tag{30}$$

$$D^{\frac{1}{q}}\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_+ & 0\\ 0 & \tilde{A}_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix},\ \ l+x_0<x<2l+x_0. \tag{31}$$

Решения преобразованных систем (30), (31) имеют вид [15, 24]

$$\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix}=L_1(x)\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix},\ \ 0<x_0<x<l+x_0, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{Z}(x)\\ \tilde{\lambda}(x)\end{bmatrix}=L_2(x)\begin{bmatrix}\tilde{c}_1\\ \tilde{c}_2\end{bmatrix},\ \ l+x_0<x<2l+x_0, \tag{33}$$

где $\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\tilde{c}_1\\ \tilde{c}_2\end{bmatrix}$ постоянные неизвестные вектор-столбцы размерности $2q\times 1$. $L_1(x), L_2(x)$ матрицы размерности $2q\times 2q$. Они определяются с помощью преобразованной функции Миттаг-Леффлера [11, 13, 27, 30] и экспоненциальной функции [20]:

при $x_0<x<l+x_0$

$$L_1(x)=\sum_{s=0}^{q-1}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{s+q}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q}{p}}x}\frac{1}{\Gamma(\frac{s+1}{q})}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q}{p}k}\frac{(x-x_0)^{\frac{s+1}{q}+k}}{\frac{s+1}{q}+k}+$$

$$+\sum_{s=0}^{q-2}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{s}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{p}{q}x_0}}\frac{x^{\frac{s+1}{q}-1}}{\Gamma(\frac{s+1}{q})}+\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q-1}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{p}{q}x_0}}, \tag{34}$$

при $l+x_0<x<2l+x_0$

$$L_2(x)=\sum_{s=0}^{q-1}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{s+q}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q}{p}}x} \frac{1}{\Gamma(\frac{s+1}{q})}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q}{p}k} \frac{(x-l)^{\frac{s+1}{q}+k}}{\frac{s+1}{q}+k}+$$

$$+\sum_{s=0}^{q-2}\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{s}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{p}{q}l}} \frac{x^{\frac{s+1}{q}-1}}{\Gamma(\frac{s+1}{q})}+\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{q-1}{p}} e^{\begin{bmatrix}A_+ & 0\\ 0 & A_-\end{bmatrix}^{\frac{p}{q}l}}, \qquad (35)$$

Решения (32), (33) с помощью преобразований (27), (28) приводятся к виду

$$\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix}=TL_1(x)C, \quad 0<x_0<x<l+x_0, \qquad (36)$$

$$\begin{bmatrix}Z(x)\\ \lambda(x)\end{bmatrix}=\tilde{T}L_2(x)\tilde{C}, \quad l+x_0<x<2l+x_0, \qquad (37)$$

где $C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$, $\tilde{C}=\begin{bmatrix}\tilde{c}_1\\ \tilde{c}_2\end{bmatrix}$.

Таким образом, мы получаем общие решения систем (21), (22) в виде (36), (37).

Учитывая условие (23) в (36) и (37), имеем:

$$\begin{bmatrix}Z(l+x_0+0)\\ \lambda(l+x_0+0)\end{bmatrix}=\tilde{T}L_2(l+x_0)\tilde{C}=F_{1\delta}TL_1(l+x_0)C+W_{11}. \qquad (38)$$

Из (38) получаем связь между C и $\tilde{C}$ следующим образом

$$\tilde{C}=\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1}\left[F_{1\delta}TL_1(l+x_0)C+W_{11}\right]. \qquad (39)$$

Далее, учитывая условия (24), (25) в (36), (37), имеем

$$\begin{bmatrix}Z(2l+x_0)\\ \lambda(2l+x_0)\end{bmatrix}=F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\tilde{C}+W_{22}=F_{2\delta}TL_1(x_0)C. \qquad (40)$$

Из (40) получаем второе соотношение между C и $\tilde{C}$ следующего вида

$$\tilde{C}=\left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1}\left[F_{2\delta}TL_1(x_0)C-W_{22}\right]. \qquad (41)$$

Приравнивая выражения (39), (41), получаем такое выражение для константы C, что

$$C = \left\{\left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} F_{2\delta}TL_1(x_0) - \left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} W_{11} + \left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} W_{22}\right\} \quad (42)$$

Подставляя (42) в (39), получаем выражение для константы $\tilde{C}$ такое, что

$$\tilde{C} = \left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} \times$$
$$\times \Big[F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\left\{\left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} F_{2\delta}TL_1(x_0) - \left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\right\}^{-1} \times \quad (43)$$
$$\times \left\{\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} W_{11} + \left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} W_{22}\right\} + W_{11}\Big].$$

Если учесть (42), (43) в (36), (37), то общие решения соответствующей задачи Коши (21)-(25) имеют вид

$$\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = TL_1(x) \times$$
$$\left\{\left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} F_{2\delta}TL_1(x_0) - \left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} W_{11} + \left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} W_{22}\right\},\ x_0 < x < l + x_0, \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = \tilde{T}L_2(x)\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} \times$$
$$\times \Big[F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\left\{\left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} F_{2\delta}TL_1(x_0) - \left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} F_{1\delta}TL_1(l+x_0)\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left[\tilde{T}L_2(l+x_0)\right]^{-1} W_{11} + \left[F_{1\delta}\tilde{T}L_2(2l+x_0)\right]^{-1} W_{22}\right\} + W_{11}\Big],\ l + x_0 < x < 2l. \quad (45)$$

Из (44) и (45) получаем оптимальную траекторию программы. После нахождения $\lambda(x)$ из (18) и (20) получаем оптимальные управления $u(x)$.

Пример. Пусть имеется следующее дифференциальное уравнение с дробной производной (p=5, q=3, l=100) [18][*]

$$\ddot{y}(x) + 3D^{\frac{5}{3}} y(x) + y(x) = u(x),\ 0 < x_0 < x < l + x_0,$$

---

[*] Поскольку в данном примере, в отличие от задачи (1)-(6), на интервале $(x_0, l + x_0)$ и $(l + x_0, 2l + x_0)$ $m = m_1$, для простоты будем данную задачу рассматривать только на интервале $(x_0, l + x_0)$.

$$\begin{cases} y(l+x_0) = y(l+x_0-0), \\ \dot{y}(l+x_0) = -\dot{y}(l+x_0-0)+V, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(l+x_0) = y(x_0), \\ \dot{y}(l+x_0) = \dot{y}(x_0) \end{cases},$$

которое можно записать в векторной форме

$$D^{\frac{1}{3}}Z(x) = AZ(x) + Bu(x),$$

$$Z(l+x_0) = F_\delta Z(l+x_0-0) + W,$$

$$Z(l+x_0) = F_{1\delta} Z(x_0),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ Z(x) = \begin{bmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \\ z_4(x) \\ z_5(x) \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ F_{1\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и с квадратичным критерием качества

$$J = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{l+x_0} (z_0(x) + z_1(x) + \ldots + z_5(x) + 10u^2(x))dx.$$

Тогда уравнение Эйлера –Лагранжа и матрица Гамильтона имеет вид

$$D^{\frac{1}{3}}\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} Z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix}, \ 0 < x_0 < x < l + x_0,$$

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda(x)=\begin{bmatrix} \lambda_0(x) \\ \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \\ \lambda_4(x) \\ \lambda_5(x) \end{bmatrix}.$$

Легко найти, что собственные значения матрицы H будут

$$\mu=\begin{bmatrix} -3.0012+0.3366i \\ -3.0012-0.3366i \\ 0.6734+0.4145i \\ 0.6734-0.4145i \\ 0.6032+0.4736i \\ 0.6032-0.4736i \\ -0.8597+0.1027i \\ -0.8597-0.1027i \\ -0.2487+0.7810i \\ -0.2487-0.7810i \\ -0.1671+0.7895i \\ -0.1671-0.7895i \end{bmatrix}.$$

Если применим преобразования (27)-(45), получим оптимальную программную траекторию $y(x)$ и управление $u(x)$ при $0<x_0<x<l+x_0$

$$y = \begin{bmatrix} -1.539052345415045e-011 \\ 3.065767853982582e-005 \\ 2.588859531715410e-004 \\ 9.201403845774630e-004 \\ 2.204660324070460e-003 \\ 4.145783023391525e-003 \\ 6.509328201778672e-003 \\ 8.683692559468187e-003 \\ 9.570464880356955e-003 \\ 7.475446457671620e-003 \\ -1.538547067525542e-011 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 6.7588e-010 \\ 3.8090e-004 \\ 5.4877e-003 \\ 2.7383e-002 \\ 8.9456e-002 \\ 2.2998e-001 \\ 5.0568e-001 \\ 9.9520e-001 \\ 1.8027e+000 \\ 3.0612e+000 \\ 4.9362e+000 \end{bmatrix},$$

Авторы выражают огромную благодарность академику Фикрету Алиеву, профессуру Нихану Алиеву за ценные советы.

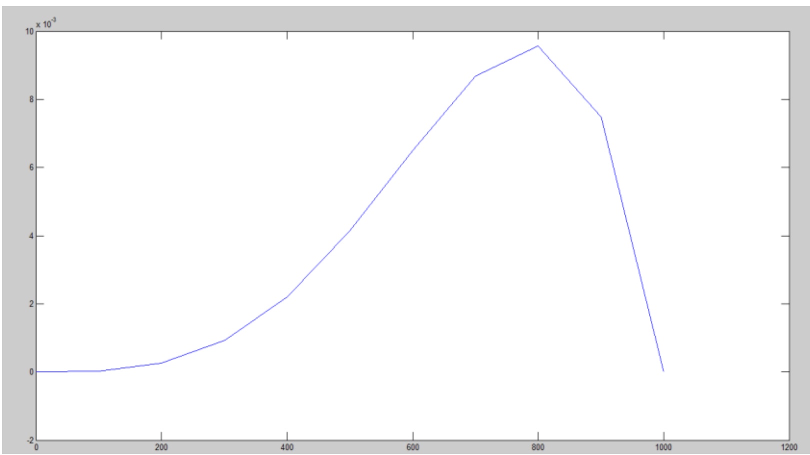

Рис. 1. Зависимость *y*(*x*) от *x*.

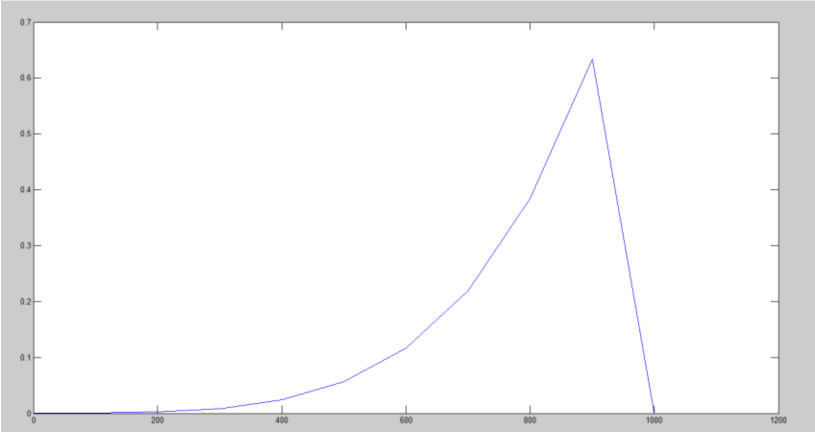

Рис. 2. Зависимость $\dot{y}(x)$ **от *x*.**

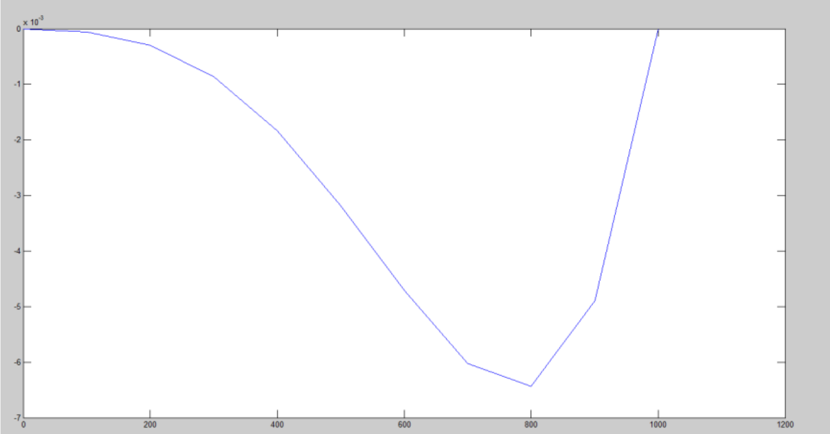

Рис. 3. Зависимость $D^{\frac{2}{3}}y(x)$ **от *x*.**

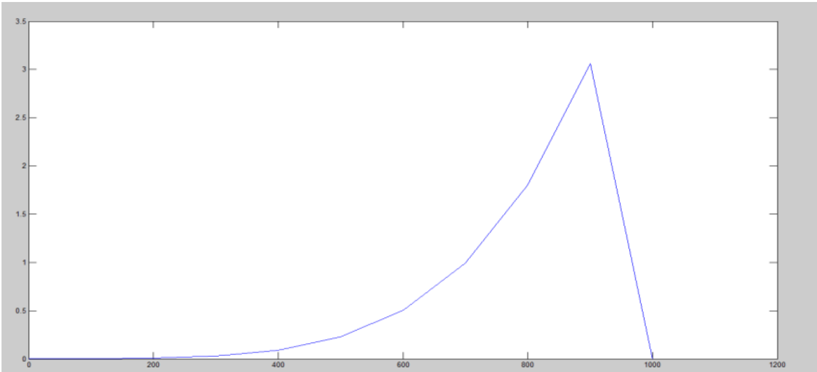

Рис. 4. Зависимость $u(x)$ от x.

Литература

1. Aliev F.A., Aliev N.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C., Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, No.4, (2021), pp.115-121.
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Ismailov N.A., Mamedova Y.V., Constructing of optimal regulators for liquid damper’s oscillatory systems, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.II, (2020), pp.68-70.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V., Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol.7, No.2, (2021), pp.970-976.
4. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Mahmudov N., Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers, A Review, Vol.20, No.3, (2021), pp.339-365.
5. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Safarova N.A., Aliyeva R., Asymptotic method for solution of oscillatory fractional derivative, Computational Methods for Differential Equations, Vol.10, No.4, (2022), pp.1123-1130.

6. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics, Vol.55, No.3, (2019), pp.332-341.
7. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identificationproblem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics, Vol.55, (2019), pp.110-116.
8. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, Vol.32, No.3, (2018), pp.1025-1033.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci., (1998), 272 p.
10. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410 p.
11. Aliev N.A., Safarova N.A., Aliev F.A., Velieva N.I., Cauchy problem of the fractional order linear ordinary differential equations, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.I, (2020), pp.101-103.
12. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Gasimova, K.G. Analytical Construction of Regulators for Systems with Fractional Derivatives, Proceed. of IAM, Vol.6, No.2, (2017), pp.252-265.
13. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and of its Applications to Problems with a Fractional Derivative, Appl. Comput. Math., Vol.18, No.3, (2019), pp.311-325.
14. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Velieva, N.I., Safarova, N.A., Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol.6 (S.I.), (2020), pp.1426-1430.
15. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I., Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, (1978).
16. Aliev, F.A., Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, (1989).
17. Andreev, Yu.I., Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, (1976).

18. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J., On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Applied Mathematics and Computation Vol.187, (2007), pp.68–78.
19. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, (1972).
20. Gantmakher, F.R., Matrix Theory, Nauka, Moscow, (1968).
21. Hajiyeva N.S., Rashidov A.M., Determination of optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers during oil production by sucker rod pumping unit, VI International scientific and practical conference "Applied Systems and Technologies in the Information Society", Kyiv, 30 september, (2022), pp.243-245.
22. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M., Essays on the Mathematical Theory of Systems, Mir, Moscow, (1972).
23. Kvakernaak, H., Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, Mir, Moscow, (1977).
24. Letov, A.M., Analytical Design of Controllers, Automation and Telemechanics, Vol.21, No.4, (1960), pp.436-441.
25. Magarramov I.A., Jafarov A.G., Aliev N.A., Aliev F.A., Method for finding periodic solutions of oscillatory systems with liquid dampers, Proceedings of IAM, Vol.9, No.2, (2020), pp.138-147.
26. Miller K.S., Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, (1993).
27. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d`une brancheuniformed`une function monogene, Acta Mathematica, Vol.29, (1904), pp.101-181.
28. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felue V., Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications, Springer, London, (2010), 414 p.
29. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A., Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.5, No.1, (2014), pp.130-137.
30. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, (1993), 780 p.
31. Zabreiko P. P., Kiselev A. N., Krasnoselsky, M. A. et al. Integral equations. Moscow: Nauka, (1968).

DETERMINATION OF OPTIMAL PROGRAM TRAJECTORY AND CONTROL FOR THE MOVEMENT OF THE PLUNGER SUCKER-ROD PUMPING UNIT

N.S. HAJIYEVA

Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: nazile.m@mail.ru

Abstract In the paper, the problem of finding optimal program trajectory and control for oscillatory systems with liquid dampers by periodic boundary condition in sucker-rod pumping unit is considered. Firstly, the equation of movement of the oscillating system is reduced to the matrix form. Then, the quadratic functional and extended functional are constructed, Euler-Lagrange equations for finding optimal program trajectory and control are written. Finally, an effective calculation algorithm is proposed.

Keywords: Oscillatory systems, fractional order derivative, extended functional, Euler-Lagrange equation, Hamiltonian matrix.

References

1. Aliev F.A., Aliev N.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C., Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, No.4, (2021), pp.115-121.
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Ismailov N.A., Mamedova Y.V., Constructing of optimal regulators for liquid damper’s oscillatory systems, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.II, (2020), pp.68-70.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V., Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol.7, No.2, (2021), pp.970-976.
4. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Mahmudov N., Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers, A Review, Vol.20, No.3, (2021), pp.339-365.

5. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Safarova N.A., Aliyeva R., Asymptotic method for solution of oscillatory fractional derivative, Computational Methods for Differential Equations, Vol.10, No.4, (2022), pp.1123-1130.
6. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics, Vol.55, No.3, (2019), pp.332-341.
7. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identificationproblem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics, Vol.55, (2019), pp.110-116.
8. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, Vol.32, No.3, (2018), pp.1025-1033.
9. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci., (1998), 272 p.
10. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410 p.
11. Aliev N.A., Safarova N.A., Aliev F.A., Velieva N.I., Cauchy problem of the fractional order linear ordinary differential equations, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.I, (2020), pp.101-103.
12. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Gasimova, K.G. Analytical Construction of Regulators for Systems with Fractional Derivatives, Proceed. of IAM, Vol.6, No.2, (2017), pp.252-265.
13. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and of its Applications to Problems with a Fractional Derivative, Appl. Comput. Math., Vol.18, No.3, (2019), pp.311-325.
14. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Velieva, N.I., Safarova, N.A., Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol.6 (S.I.), (2020), pp.1426-1430.
15. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I., Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, (1978).

16. Aliev, F.A., Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, (1989).
17. Andreev, Yu.I., Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, (1976).
18. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J., On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Applied Mathematics and Computation Vol.187, (2007), pp.68–78.
19. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, (1972).
20. Gantmakher, F.R., Matrix Theory, Nauka, Moscow, (1968).
21. Hajiyeva N.S., Rashidov A.M., Determination of optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers during oil production by sucker rod pumping unit, VI International scientific and practical conference "Applied Systems and Technologies in the Information Society", Kyiv, 30 september, (2022), pp.243-245.
22. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M., Essays on the Mathematical Theory of Systems, Mir, Moscow, (1972).
23. Kvakernaak, H., Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, Mir, Moscow, (1977).
24. Letov, A.M., Analytical Design of Controllers, Automation and Telemechanics, Vol.21, No.4, (1960), pp.436-441.
25. Magarramov I.A., Jafarov A.G., Aliev N.A., Aliev F.A., Method for finding periodic solutions of oscillatory systems with liquid dampers, Proceedings of IAM, Vol.9, No.2, (2020), pp.138-147.
26. Miller K.S., Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, (1993).
27. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d`une brancheuniformed`une function monogene, Acta Mathematica, Vol.29, (1904), pp.101-181.
28. Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Felue V., Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications, Springer, London, (2010), 414 p.
29. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A., Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.5, No.1, (2014), pp.130-137.
30. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, (1993), 780 p.

31. Zabreiko P. P., Kiselev A. N., Krasnoselsky, M. A. et al. Integral equations. Moscow: Nauka, (1968).